



**SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT
LISBON**

MESTRADO
MATEMÁTICA FINANCEIRA

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO

ULTIMATE FORWARD RATE
E PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES

ANA RITA PITA GROZ COSTA

SETEMBRO DE 2013



**SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT
LISBON**

**MESTRADO EM
MATEMÁTICA FINANCEIRA**

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO

ULTIMATE FORWARD RATE
E PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES

ANA RITA PITA GROZ COSTA

ORIENTADOR: DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

SETEMBRO DE 2013

ULTIMATE FORWARD RATE E PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES

ANA RITA PITA GROZ COSTA

ORIENTADOR: DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

MESTRADO EM: MATEMÁTICA FINANCEIRA

RESUMO

A avaliação de planos e fundos de pensões pressupõe a atualização de *cash-flows* que ocorrem no muito longo prazo, tornando obrigatória a estimação das taxas de desconto, para todas as maturidades em causa, de modo a refletir o valor temporal do dinheiro, de forma adequada.

Em Solvência II, a Estrutura Temporal das Taxas de Juro deve ser obtida recorrendo à metodologia macroeconómica de Smith & Wilson [2001] pois garante resultados estáveis no muito longo prazo. Esta estabilidade é conseguida através da convergência das taxas *forward* assim estimadas para a taxa de juro em equilíbrio de longo prazo, a *Ultimate Forward Rate*.

O principal objetivo do estudo é precisamente procurar avaliar o impacto da introdução do método de Smith-Wilson e da *Ultimate Forward Rate* no cálculo das responsabilidades dos planos de pensões. Adicionalmente, procura-se verificar se as conclusões obtidas por Budiono [2012] e Kocken et al. [2012], relativamente ao mercado de planos e fundos de pensões holandês, são extensíveis à realidade portuguesa, recorrendo a um caso de estudo.

PALAVRAS-CHAVE: SOLVÊNCIA II, PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES, ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO, METODOLOGIA DE SMITH-WILSON, *ULTIMATE FORWARD RATE*

ULTIMATE FORWARD RATE AND PENSION PLANS AND FUNDS

ANA RITA PITA GROZ COSTA

SUPERVISOR: DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

MASTER: MATEMÁTICA FINANCEIRA

ABSTRACT

Pension Fund evaluation implies discounting *cash-flows* that occur in the very long term. Therefore, insurance companies face the challenge of finding the discount rate, for each maturity, which reflects correctly the time value of money.

Accordingly with Solvency II, the risk free term structure must be obtained using Smith & Wilson [2001] macroeconomic methodology. The overall aim is to construct a stable extrapolated yield curve which embodies economic views on how long term rates are expected to behave. Stability is achieved through convergence of the estimated forward rates to the long term equilibrium rate, called the Ultimate Forward Rate.

The purpose of this study is to determine what will be the impact on the valuation of liability cash-flows, once Smith-Wilson methodology and Ultimate Forward Rate are introduced.

Solvency II requirements are applied to the Portuguese case and results are compared to some extent with the works of Budiono [2012] and Kocken et al. [2012] for the Dutch market.

KEY WORDS: SOLVENCY II, PENSION PLANS AND FUNDS, YIELD CURVE, SMITH-WILSON METHODOLOGY, *ULTIMATE FORWARD RATE*

ÍNDICE

RESUMO	III
ABSTRACT	IV
AGRADECIMENTOS	IX
1 INTRODUÇÃO	10
1.1 ENQUADRAMENTO	10
1.2 MOTIVAÇÃO	11
2 ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO	14
2.1 ALGUNS CONCEITOS	14
2.2 ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO SEM RISCO	16
2.3 TEORIAS DA ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO	16
2.3.1 TEORIA DAS EXPECTATIVAS PURAS	17
2.3.2 TEORIA DO PRÉMIO DE LIQUIDEZ	17
2.3.3 TEORIA DO <i>HABITAT</i> PREFERIDO	18
2.3.4 TEORIA DA SEGMENTAÇÃO DE MERCADO	19
2.3.5 TEORIA DAS EXPECTATIVAS ENVIESADAS	20
2.4 CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO	21
2.4.1 UTILIZAÇÃO DE TAXAS <i>SWAP</i> VERSUS OBRIGAÇÕES GOVERNAMENTAIS	21
2.5 MÉTODOS PARA A CONSTRUÇÃO DA ETTJ	23
2.5.1 MÉTODO DIRETO	23
2.5.2 MÉTODOS INDIRETOS	24
3 ULTIMATE FORWARD RATE	28
3.1 ESTIMAÇÃO DA TAXA DE INFLAÇÃO DE LONGO PRAZO ESPERADA	29
3.2 ESTIMAÇÃO DA TAXAS DE JURO REAL ESPERADA	30

4 MÉTODO DE SMITH-WILSON E CONVERGÊNCIA PARA A UFR	32
4.1 DETERMINAÇÃO DA ETTJ	32
4.2 ESTUDO SOBRE OS PARÂMETROS	33
4.2.1 ATUALIZAÇÃO DO VALOR DA UFR	33
4.2.2 ALFA	34
4.2.3 <i>LAST LIQUID POINT</i>	35
5 AVALIAÇÃO DE PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES	37
5.1 GENERALIDADES	37
5.2 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA DE SMITH-WILSON E <i>ULTIMATE FORWARD RATE</i> NA	
AVALIAÇÃO DE UM PLANO DE PENSÕES	40
5.2.1 PRESSUPOSTOS ATUARIAIS	41
5.2.2 AVALIAÇÃO ATUARIAL	43
5.3 OUTROS IMPACTOS DA INTRODUÇÃO DA UFR	44
6 CONCLUSÃO	46
BIBLIOGRAFIA	48
ANEXO A – MÉTODOS INDIRETOS PARA A CONSTRUÇÃO DA ETTJ	52
ANEXO B – ESTUDO SOBRE OS PARÂMETROS DO MÉTODO DE SMITH-WILSON	55
ANEXO C – AVALIAÇÃO DAS RESPONSABILIDADES DO PLANO DE PENSÕES	57

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 – TAXAS <i>FORWARD</i>	14
FIGURA 2 – TAXAS DE JURO DE LONGO PRAZO ENTRE 2000 E 2010	31
FIGURA 3 – TAXAS DE JURO DE LONGO PRAZO ESTIMADAS ENTRE 2012 E 2013	31
FIGURA 4 – ETTJ ESTIMADA PELO MÉTODO DE SMITH-WILSON E CONVERGÊNCIA PARA A UFR	32
FIGURA 5 – ATUALIZAÇÃO DO VALOR DA UFR	33
FIGURA 6 – EVOLUÇÃO DOS MONTANTES GERIDOS PELOS FUNDOS DE PENSÕES	39
FIGURA 7 – ETTJ USADAS NO CÁLCULO DAS RESPONSABILIDADES DO PLANO DE PENSÕES	42
FIGURA 8 – VALOR ATUAL DOS BENEFÍCIOS TOTAIS COM AS DIFERENTES ETTJ CONSIDERADAS	44

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA I – TAXA DE INFLAÇÃO DE LONGO PRAZO ESPERADA	29
TABELA II – <i>ULTIMATE FORWARD RATE</i>	30
TABELA III – PARÂMETRO ALFA E PERÍODO DE CONVERGÊNCIA	34
TABELA IV – TRANSAÇÕES DE <i>SWAPS</i> DE TAXAS DE JURO	36
TABELA V – AVALIAÇÃO DO PLANO DE PENSÕES – ENTIDADE GESTORA	43
TABELA VI – AVALIAÇÃO DO PLANO DE PENSÕES – MÉTODO DE SMITH-WILSON E UFR	43
TABELA VII – <i>ULTIMATE FORWARD RATE</i> E ERROS QUADRÁTICOS MÉDIOS	55
TABELA VIII – PARÂMETRO ALFA	56
TABELA IX – DISTRIBUIÇÃO ETÁRIA DOS COLABORADORES ABRANGIDOS PELO PLANO DE PENSÕES	57

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BCE – Banco Central Europeu

CEIOPS – Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors

EQM – Erros quadráticos médios

ETTJ – Estrutura Temporal das Taxas de Juro

ISP – Instituto de Seguros de Portugal

INR – Idade Normal de Reforma

LCH – *London Clearing House*

LLP – *Last Liquid Point*

MCR – *Minimum Capital Requirement*

ORSA – *Own Risk and Solvency Assessment*

PIB – Produto Interno Bruto

QIS5 – Quinto Estudo de Impacto Quantitativo

SCR – *Solvency Capital Requirement*

UFR – *Ultimate Forward Rate*

VABT – Valor atual dos benefícios totais

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Doutor Onofre Simões, por todos os valiosos conselhos, pela preciosa ajuda e pelo seu apoio ao longo de todo o trabalho.

Aos meus pais, pelo amor, carinho e pelo infindável apoio ao longo de todo o meu percurso académico. À minha mãe, pela força, pela paciência e por todos os conselhos.

Ao meu pai, por me ter incutido o gosto pela matemática nas explicações de sábado à tarde.

À minha família, e em especial à minha Tia Isilda, por toda a preocupação e por todo o carinho.

Quero muito agradecer a todos os meus amigos e colegas pelo companheirismo, pelo apoio e por todas as frases de incentivo.

Um agradecimento muito especial ao Frederico pois a sua paciência e compreensão não conhecem limites.

Por fim, mas de certeza não menos importante, quero dedicar todo o meu trabalho aos meus avós, e em especial à minha avó Isabel, na certeza do orgulho que sei que sentem por mim.

1 INTRODUÇÃO

1.1 ENQUADRAMENTO

A recente crise financeira e as consequentes repercussões no mercado de dívida levaram à necessidade de adotar reformas no sector segurador. Neste contexto, o projeto Solvência II veio substituir o anterior regime Solvência I, integrando não só as lições provenientes da crise mas também os avanços que têm surgido nas práticas de gestão de risco.

Os princípios base de Solvência II foram estabelecidos pela Diretiva 2009/138/CE do Parlamento Europeu e do Conselho, de 25 de Novembro de 2009. O projeto centra-se na identificação e avaliação dos riscos e na sua gestão e controlo eficazes. Aliás, pode mesmo dizer-se que tem por objetivo principal a proteção dos tomadores de seguro e beneficiários. Para tal, pretende promover-se, em todo o sector segurador europeu uma cultura de supervisão baseada nos riscos, uma avaliação consistente dos ativos e passivos, apoiada em princípios económicos, e um maior alinhamento entre a regulamentação dos capitais exigidos e os riscos efetivamente assumidos pelas empresas de seguros e resseguros.

O projeto Solvência II tem também como objetivo garantir a concorrência e a comparabilidade no sector segurador, trabalhando na harmonização e convergência das regras e práticas adotadas na União Europeia.

Solvência II está estruturado em três pilares. O Pilar I compreende os requisitos quantitativos a que as empresas de seguros e resseguros devem obedecer e inclui as provisões técnicas, os investimentos e os dois níveis de requisitos de capital – o requisito de capital de solvência (*Solvency Capital Requirements* - SCR) e o requisito de capital mínimo (*Minimum Capital Requirement* - MCR).

O Pilar II compreende os requisitos qualitativos ligados ao sistema de governação e inclui os mecanismos de gestão de riscos e de controlo interno e também o processo de auto-avaliação do risco e da solvência de cada empresa (*Own Risk and Solvency Assessment* – ORSA). Comporta igualmente as disposições relacionadas com o processo de supervisão, dando ênfase aos riscos assumidos.

O Pilar III compreende os objetivos de transparência e disciplina de mercado, que devem ser alcançados pondo em prática um sistema efetivo de prestação pública de informação e de reporte aos supervisores.

1.2 MOTIVAÇÃO

Uma das áreas em discussão no âmbito de Solvência II é a avaliação das responsabilidades dos planos e fundos de pensões - e de outros produtos em que as garantias se estendem no longo prazo. A avaliação destes instrumentos pressupõe a avaliação e atualização de *cash flows* futuros, por vezes, muito distantes do momento presente. Coloca-se assim o desafio de encontrar a taxa de desconto correta para cada maturidade, ou seja, a Estrutura Temporal das Taxas de Juro (ETTJ), que reflete o valor temporal do dinheiro ao longo do tempo.

De acordo com o Projeto Solvência II, a avaliação das responsabilidades dos planos e fundos de pensões deve ser feita recorrendo aos dados disponibilizados pelo mercado. No entanto, como se verá, isto constitui uma dificuldade, pois tais responsabilidades estendem-se para além das maturidades dos instrumentos financeiros que se encontram disponíveis.

Em Solvência II, determinou-se ainda que a Estrutura Temporal das Taxas de Juro sem risco deve ser obtida recorrendo a técnicas de extrapolação macroeconómicas, uma vez que estes modelos permitem garantir resultados estáveis no longo prazo. Note-se

que a estabilidade das taxas de juro para maturidades mais longas é uma propriedade importante dos modelos macroeconómicos, em especial quando aplicados a moedas onde as taxas de juro líquidas só estão disponíveis no curto prazo, pois a sua extrapolação para o longo prazo causaria excessiva volatilidade.

Nos modelos macroeconómicos, a estabilidade no longo prazo é conseguida através da convergência das taxas *forward* estimadas para a taxa de juro em equilíbrio de longo prazo, ou seja, para a *Ultimate Forward Rate* (UFR). Repare-se que a UFR não é mais do que um indicador macroeconómico que, na prática, resulta da soma da taxa de inflação de longo prazo esperada com a taxa de juro real esperada.

É neste contexto que se desenha a motivação para o presente trabalho: estudar a utilização de um modelo macroeconómico apropriado na construção da Estrutura Temporal das Taxas de Juro sem risco e a introdução de um equilíbrio de longo prazo, alcançado através da convergência para a *Ultimate Forward Rate*. O modelo de Smith-Wilson tem sido considerado o mais adequado para estes fins (cf. *QIS5 Calibration Paper*, 2010).

Mais ainda, vai procurar aplicar-se à realidade portuguesa, tanto quanto possível, um estudo pioneiro efetuado na Holanda por Budiono [2012], onde se analisa o impacto que a introdução da *Ultimate Forward Rate* tem sobre a *performance* dos planos e fundos de pensões.

A este respeito, pode adiantar-se que as seguradoras a operar no mercado holandês calculam, desde julho de 2012, a Estrutura Temporal das Taxas de Juro, fixando a *Ultimate Forward Rate* em 4,2% e aplicando a metodologia de Smith-Wilson. Ao introduzir estas novas regras, o Banco Central Holandês pretende não só antecipar as

medidas que serão adotadas no âmbito do Solvência II, mas também mitigar o risco de flutuação das taxas de juro.

Este texto encontra-se estruturado da forma seguinte. O estudo das Estruturas Temporais das Taxas de Juro será apresentado no Capítulo 2. É também neste capítulo que se apresenta, em grande detalhe, o método de Smith-Wilson, posteriormente aplicado. No Capítulo 3 é introduzido o conceito de *Ultimate Forward Rate*, de modo tão completo quanto possível.

Considerando que o relatório final do Quinto Estudo de Impacto Quantitativo (*Fifth Quantitative Impact Study* – QIS5) data de 24 de Março de 2011, no Capítulo 4 pretende estudar-se se o valor proposto para a UFR (4,2%) está de acordo com as condições atuais de mercado. Ainda no Capítulo 4, são feitas algumas considerações sobre os restantes parâmetros do modelo.

No Capítulo 5, aplica-se a metodologia proposta em Solvência II na avaliação de um plano de pensões do mercado português. Por forma a garantir confidencialidade, não será revelada a entidade gestora ou a empresa aderente ao plano de pensões.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões retiradas do estudo.

A discussão em torno da UFR e do modelo de Smith-Wilson é bastante recente, pelo que não existem ainda muitos estudos publicados sobre o tema. No entanto, ao longo do texto, serão indicadas as principais referências.

2 ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO

2.1 ALGUNS CONCEITOS

Muito brevemente, apresentações mais completas podem ver-se, por exemplo, em Brealey & Myers [2006], têm-se as seguintes noções:

- *Yields to maturity* - taxas de desconto que igualam os preços de mercado de títulos financeiros (por exemplo, das obrigações com diferentes maturidades) aos valores atuais de todos os seus *cash flows*. Quer dizer: se $P(T)$ é o preço da obrigação na maturidade T , CF_i é o *cash-flow* por ela proporcionado no momento i e ym é a *yield to maturity*, então

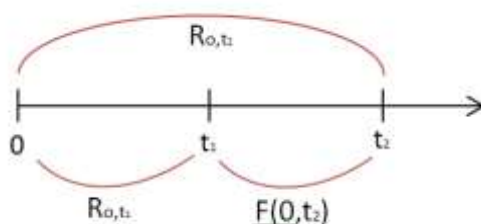
$$(1) \quad P(T) = \sum_{i=0}^T \frac{CF_i}{(1+ym)^i}.$$

- Taxas *spot* - *yields to maturity* das obrigações de cupão zero, considerando todas as possíveis maturidades. Quer dizer: se $R_{0,T}$ é a taxa *spot* para o intervalo $[0, T]$, então

$$(2) \quad P(T) = \frac{CF_T}{(1+R_{0,T})^T}.$$

- Taxas *forward* - taxas de juro fixadas no presente para vigorar em intervalos de tempo com início em momentos futuros. Considerando um intervalo $[t_1, t_2]$, e dadas as taxas *spot*, é possível calcular a taxa *forward* $F(0, t_2)$ implícita, de acordo com o seguinte esquema:

FIGURA 1 – TAXAS FORWARD



Vem:

$$(3) \quad (1 + R_{0,t_2})^{t_2} = (1 + R_{0,t_1})^{t_1} \times (1 + F(0, t_2))^{t_2 - t_1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F(0, t_2) = \left[\frac{(1 + R_{0,t_2})^{t_2}}{(1 + R_{0,t_1})^{t_1}} \right]^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1.$$

- Taxas *swap* - estão associadas aos *swaps*, que não são mais do que contratos em que há uma troca de posições acordada entre duas partes. Estas trocas envolvem taxas de juro – e, noutros casos, moedas ou matérias-primas. São as principais taxas usadas como referência na determinação das taxas de juro fixas aplicadas a operações de médio e longo prazo.
- Risco de Crédito - possibilidade do emitente de um título de dívida não conseguir cumprir as suas obrigações, ou seja, não conseguir pagar os juros e/ou efetuar o reembolso do valor facial do título financeiro na maturidade.
- Risco de Taxa de Juro - está relacionado com a incerteza quanto às taxas de juro que se vão observar no futuro. Estas têm impacto sobre os preços dos ativos (por exemplo, de obrigações) e, portanto, sobre os ganhos ou perdas de capital. Repare-se que existe uma relação inversa entre as variações da taxa de juro e a evolução dos preços das obrigações e que um investidor apenas corre o Risco de Taxa de Juro caso pretenda vender o título antes da maturidade.
- Prémio de liquidez – não é mais do que um prémio de risco exigido pelos investidores para adquirem títulos financeiros com maturidades mais longas. O retorno adicional exigido materializa-se por um aumento da *yield to maturity* dos instrumentos.

2.2 ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO SEM RISCO

A Estrutura Temporal das Taxas de Juro (*yield curve*, em inglês) é a relação entre as taxas de juro e a sua maturidade, num dado momento do tempo e para uma determinada moeda. Existem diferentes tipos de *yield curves*, de acordo com as taxas de juro utilizadas (*yields to maturity*, taxas *spot*, taxas *forward*, taxas *swap*).

Uma primeira grande divisão, no que diz respeito às ETTJ, é a separação entre curvas de mercado e curvas implícitas. As curvas de mercado são obtidas diretamente dos dados disponibilizados pelo mercado, como é o caso das *yields to maturity* e das taxas *swap*. As curvas implícitas são determinadas através da relação existente entre o preço das obrigações e as taxas de juro, ou seja, são curvas deduzidas implicitamente dos dados do mercado, como é o caso das taxas *spot* e das taxas *forward*.

A Estrutura Temporal das Taxas de Juro pode ser crescente, decrescente, *quasi-flat* e *humped* e pode sofrer alterações em resposta a choques económicos e eventos específicos de mercado, como por exemplo alterações da procura e oferta de obrigações governamentais. Estes fenómenos provocam deslocações paralelas no declive e/ou na curvatura da *yield curve*.

2.3 TEORIAS DA ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO

O estudo do comportamento das taxas de juro ao longo do tempo é uma questão complexa, mas relevante. As diferentes teorias da Estrutura Temporal das Taxas de Juro, de que se faz breve nota a seguir, procuram explicar o porquê de uma curva ter uma determinada forma, num determinado momento do tempo. Apresentações mais detalhadas sobre as diferentes teorias existentes podem ler-se nas obras de Alves [1996] e Cox *et al.* [1985].

2.3.1 TEORIA DAS EXPECTATIVAS PURAS

A **Teoria das Expectativas Puras**, também denominada Teoria das Expectativas não Enviesadas ou Racionais, defende que as taxas *forward* refletem exclusivamente as taxas *spot* futuras, de acordo com as expectativas do mercado. Segundo esta teoria, uma ETTJ crescente (respetivamente, decrescente e *flat*) significa que o mercado espera um aumento (respetivamente, diminuição e estagnação) das taxas de juro futuras de curto prazo.

De acordo com a Teoria das Expectativas Puras, a divergência entre taxas de juro associadas a diferentes maturidades está relacionada apenas com as expectativas dos participantes no mercado, relativamente à evolução futura das taxas de juro.

No entanto, se as taxas *forward* fossem bons previsores das taxas *spot* futuras, os preços futuros dos títulos financeiros seriam conhecidos hoje com certeza, o que não acontece, e tanto as taxas de juro futuras como os preços futuros das obrigações são desconhecidos.

A limitação da Teoria das Expectativas Puras reside, essencialmente, na hipótese implícita de que os participantes no mercado são neutros ao risco e, por isso, não têm em conta que as suas expectativas podem estar erradas. Dado que a maioria das ETTJ são crescentes, sugerindo a existência de prémios de risco que aumentam com a maturidade, e dado que os investidores são avessos ao risco, emergiram teorias alternativas que estão mais de acordo com os dados empíricos.

2.3.2 TEORIA DO PRÉMIO DE LIQUIDEZ

As obrigações com maturidades no longo prazo estão mais sujeitas ao risco de taxa de juro do que as obrigações de curto prazo. De facto, os investidores em obrigações de longo prazo sujeitam-se mais ao risco de perdas de capital no caso de terem que

vender antecipadamente as suas obrigações. Atendendo a isso, a **Teoria do Prémio de Liquidez** argumenta que os investidores devem ser compensados – através de um aumento da *yield* – pelo maior risco inerente ao investimento em títulos de longo prazo.

De acordo com esta teoria, o prémio de liquidez exigido para ativos de longo prazo aumenta com a maturidade numa proporção decrescente. Ou seja, se se representar por L_t o prémio de liquidez exigido pelo mercado para investir numa obrigação com maturidade t , tem-se:

$$0 = L_1 < L_2 < \dots < L_t ,$$
$$L_2 - L_1 > L_3 - L_2 > \dots > L_t - L_{t-1} .$$

Uma vez que o prémio é positivo e crescente com a maturidade, a Teoria do Prémio de Liquidez defende que a ETTJ “normal” tem uma inclinação positiva. De facto, mesmo que de acordo com as expectativas dos participantes no mercado as taxas de juro se mantenham constantes no futuro, a ETTJ será crescente devido aos prémios de liquidez. Apenas no caso em que se espera uma descida acentuada das taxas de juro, a *yield curve* terá uma inclinação negativa.

2.3.3 TEORIA DO *HABITAT* PREFERIDO

À semelhança da Teoria do Prémio de Liquidez, a **Teoria do *Habitat* Preferido** defende que a *yield curve* reflete as expectativas sobre as taxas *spot* esperadas no futuro, assim como um prémio de risco.

Os participantes no mercado, investidores e emissores de dívida, têm preferências por determinadas maturidades – o seu *habitat* preferido. Contudo, estão dispostos a adquirir (emitir) títulos com outras maturidades, se a rendibilidade esperada oferecida por essas maturidades for suficientemente grande.

Assim, a Teoria do *Habitat* Preferido argumenta que a forma da ETTJ é determinada pelas expectativas que os agentes têm sobre as taxas de juro futuras e pelo prémio de risco, positivo ou negativo, que exigem para adquirir títulos fora do seu *habitat* preferido. Em consequência, esta teoria não considera que o prémio de risco tenha de ser crescente com a maturidade, mas apenas similar para títulos de dívida cujas maturidades sejam atingidas em datas muito próximas.

2.3.4 TEORIA DA SEGMENTAÇÃO DE MERCADO

A **Teoria da Segmentação de Mercado** defende que os investidores e os emissores de dívida têm preferências particulares por determinadas maturidades e que, ao contrário do que defende a teoria do *habitat* preferido, não se deslocam para outro segmento de maturidade mesmo que a rentabilidade esperada seja superior.

Por exemplo, os bancos comerciais investem em títulos de curto prazo, dadas as suas necessidades de liquidez e a composição do seu passivo. Por outro lado, fundos de pensões preferem investir em títulos de longo prazo, uma vez que as suas responsabilidades são, essencialmente, a criação de renda (anuidades e pensões) num horizonte de tempo de muito longo prazo. Por sua vez, os emissores de dívida adequam o vencimento dos seus passivos, ou seja, a maturidade dos títulos que emitem, de acordo com a maturação dos seus projetos.

Desta forma, tal como explicam Mishkin & Eakings [2008], o mercado é segmentado de acordo com as preferências dos agentes por maturidades com oferta e procura independentes. As taxas de juro de curto e longo prazo são determinadas independentemente, a partir da intersecção da procura e oferta nos diferentes segmentos. Em geral, no mercado de curto prazo a procura excede a oferta e o contrário acontece no mercado de longo prazo.

De acordo com a Teoria da Segmentação do Mercado, não existe uma relação estreita entre as taxas de juro com maturidades diferentes e, como tal, não existe uma relação sistemática entre as taxas *forward* e as taxas *spot* esperadas no futuro. O prémio de risco pode ser positivo ou negativo, uma vez que os agentes não abandonam o seu *habitat* preferido.

Esta teoria tem também algumas limitações. Em primeiro lugar, ao assumir que o formato da ETTJ é determinado unicamente pela oferta e procura de títulos dentro de cada segmento, e que cada um destes segmentos é independente, não explica a razão pela qual as alterações da *yield curve* acontecem em conjunto. Por outro lado, não é consistente com as evidências empíricas, uma vez que rejeita a hipótese de existirem investidores e emissores de dívida suficientemente flexíveis para comprarem e/ou emitirem títulos fora do seu *habitat* preferido, mediante uma rendibilidade esperada superior.

2.3.5 TEORIA DAS EXPECTATIVAS ENVIESADAS

A **Teoria das Expectativas Enviesadas**, também denominada Teoria da Preferência pela Liquidez, argumenta que os investidores e os emissores de dívida têm preferências diferentes quanto à maturidade dos títulos. Os investidores preferem investir em instrumentos financeiros com maturidades mais curtas, enquanto os emissores de dívida, dado que os seus projetos se desenvolvem maioritariamente no longo prazo, preferem emitir títulos com maturidades mais longas. Para contrariar a preferência dos investidores pela liquidez associado aos prazos mais curtos é necessário incluir um prémio de risco nos prazos mais longos.

Com efeito, de acordo com esta teoria, a ETTJ reflete não só as expectativas do mercado para as taxas de juro futuras, como também um prémio de liquidez

permanente, que varia ao longo do tempo. Como tal, ao contrário da Teoria das Expectativas Puras, as taxas *forward* não são estimadores não enviesados das taxas de juro futuras.

2.4 CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO

A Estrutura Temporal das Taxas de Juro deve ser construída de forma consistente, e com recurso a uma metodologia uniforme e instrumentos financeiros transacionados em mercados profundos, líquidos e transparentes, por forma a eliminar quaisquer enviesamentos técnicos (cf. Draft do Regulamento de nível 2, 2011).

Em teoria, a ETTJ é construída recorrendo a obrigações de cupão zero com maturidades suficientes para cobrir todo o horizonte pretendido. No entanto, as obrigações de cupão zero só estão disponíveis para um número limitado de maturidades, pelo que é necessário recorrer a instrumentos líquidos de rendimento fixo, habitualmente as taxas *swap* (por vezes ajustadas do risco de crédito) e/ou as obrigações soberanas com melhor *rating* (por vezes, corrigidas do enviesamento técnico).

2.4.1 UTILIZAÇÃO DE TAXAS *SWAP* VERSUS OBRIGAÇÕES GOVERNAMENTAIS

Existem vantagens e desvantagens associadas à utilização quer de taxas *swap* quer de obrigações soberanas, na construção da ETTJ sem risco.

As taxas *swap* têm varias características desejáveis: são instrumentos financeiros com elevados níveis de liquidez, estão disponíveis para um largo horizonte de maturidades, têm um reduzido risco de crédito e enviesamento técnico e são transacionadas em várias moedas, em mercados transparentes.

Por outro lado, os *swaps* são tipicamente transações com colateral que, no entanto, apenas cobre o valor de mercado do *swap*, ou seja, o valor atual dos *cash flows* a pagar

e a receber. Os contratos *swaps* estão sujeitos às flutuações de mercado e podem ser afetados por eventos de incumprimento. Neste sentido, entende-se que apresentam um maior risco de crédito, face às obrigações governamentais com melhor *rating*. Como consequência, tipicamente, a ETTJ sem risco obtida através das taxas *swap* excede a obtida através de obrigações soberanas AAA, refletindo o *spread* associado ao maior risco de crédito. No entanto, tal pode não se verificar, por exemplo, se a procura de obrigações de longo prazo diminuir; nesse caso, o preço também diminuiu e, consequentemente, aumenta a *yield to maturity* das obrigações.

A Estrutura Temporal das Taxas de Juro construída a partir das obrigações soberanas AAA foi inicialmente considerada por muitos como a curva sem risco natural. Inclusivamente, o *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors* (CEIOPS) propôs em 2009 que a ETTJ sem risco fosse construída com recurso a este tipo de obrigações. De facto, durante a crise financeira de 2008-09, o mercado de *swaps* foi fortemente afetado, justificando a proposta do CEIOPS.

Mas também a utilização de obrigações soberanas com *rating* AAA não está livre de algumas desvantagens. Por um lado, as empresas seguradoras ver-se-iam forçadas a aumentar o investimento neste tipo de obrigações, por forma a conseguirem cobrir as suas responsabilidades. O aumento da procura de obrigações soberanas com *rating* AAA levaria a um aumento artificial do seu valor e, simultaneamente, a uma diminuição da procura de obrigações governamentais e privadas com *ratings* inferiores, colocando as entidades emitentes deste tipo de títulos em maiores dificuldades de financiamento.

No âmbito deste trabalho, pelas mais recentes diretrizes do Solvência II assim o indicarem, estima-se a ETTJ recorrendo às taxas *swap*.

2.5 MÉTODOS PARA A CONSTRUÇÃO DA ETTJ

A ETTJ não é diretamente observável e, como tal, é necessário estimá-la recorrendo aos dados disponíveis no mercado. A primeira dificuldade associa-se ao facto de não existirem observações para todas as maturidades, em tempo contínuo, o que obriga a construir a *yield curve* a partir do conjunto discreto de dados de que se dispõe. Recorre-se a métodos (diretos e indiretos) para construir uma curva contínua que tem, obrigatoriamente, que passar pelos pontos conhecidos, obtidos diretamente da informação do mercado, por forma a garantir o princípio de não arbitragem. Recorre-se depois a técnicas de extrapolação para estimar a curva a partir da última maturidade em que se assume que o mercado ainda é suficientemente líquido. O ponto a que corresponde esta maturidade é geralmente denominado por *Last Liquid Point* (LLP).

2.5.1 MÉTODO DIRETO

A construção da Estrutura Temporal das Taxas de Juro sem risco através do método direto recorre a técnicas de *bootstrapping* e interpolações. A técnica de *bootstrapping* permite calcular, para determinadas maturidades, taxas *spot* não observáveis no mercado a partir do preço de obrigações de cupão zero. No entanto, uma vez que após a utilização desta técnica se tem ainda um conjunto finito de pontos, é necessário recorrer a interpolações (lineares, ou outras) para se obter uma curva contínua.

A teoria elementar a que já se recorreu na equação (2) ensina que o preço *spot* de uma obrigação com maturidade T é dado por:

$$(4) \quad P_0^T = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+R_{0,t})^t} = \sum_{t=1}^T CF_t \times B(0,t) \Rightarrow B(0,t) = \frac{1}{(1+R_{0,t})^t},$$

onde $B(0,t)$ é o factor de desconto a partir de t (ou o preço de uma obrigação de cupão zero com valor facial 1 e maturidade t). Então, se existirem n obrigações (índice superior nas fórmulas que se seguem) com n datas de pagamento (índice inferior), vem de forma condensada e em notação matricial:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} P_0^1 \\ \dots \\ P_0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CF_1^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CF_1^n & \dots & CF_n^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B(0,1) \\ \dots \\ B(0,n) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{P}_0 = \mathbf{CF} \times \mathbf{B}_0 \Leftrightarrow \mathbf{B}_0 = \mathbf{CF}^{-1} \mathbf{P}_0 ,$$

admitindo que \mathbf{CF} é uma matriz regular.

Conclui-se que, se houver n obrigações com n maturidades, se obtém o vetor dos n factores de desconto, desde que a matriz CF dos *cash flows* seja invertível. A partir daí, é possível calcular as correspondentes taxas *spot*.

2.5.2 MÉTODOS INDIRETOS

A utilização de métodos indiretos na estimação da ETTJ sem risco pretende garantir a suavidade (*smoothness*) da curva obtida e, como tal, tenta ajustar-se um determinado modelo aos dados diretamente observáveis no mercado. Envolve, essencialmente, três passos.

Em primeiro lugar, assume-se que a função dos preços dos instrumentos financeiros é conhecida para um número fixo de maturidades. Como tal, escolhem-se n obrigações com preços P^n , $t = 1, 2, \dots, n$, e que pagam *cash flows* em momentos j , $CF^t(j)$, $j = 1, \dots, t$. O segundo passo consiste em impor uma determinada forma funcional com n parâmetros para a função dos preços, para as taxas *spot*, as taxas *forward* ou os factores de desconto. A forma funcional utilizada depende do modelo determinístico de taxas de juro que foi escolhido e pode ser polinomial, exponencial, definida através de *splines* ou uma combinação destas. Por fim, estimam-se os n parâmetros minimizando a soma dos erros quadráticos entre os valores estimados e os valores de mercado.

Assim, recorre-se muitas vezes a *splines* e a modelos determinísticos de taxas de juro como o modelo de Nelson & Siegel [1987] e a sua extensão, o modelo de Svensson [1994]. Estes métodos encontram-se descritos no Anexo A.

Outra possibilidade é oferecida pelo modelo de Smith & Wilson [2001], modelo macroeconómico proposto no âmbito do projeto Solvência II para a construção da ETTJ que deve ser utilizada na avaliação das responsabilidades dos planos e fundos de pensões. Com a indicação de uma abordagem macroeconómica, pretende garantir-se resultados relativamente estáveis no longo prazo, através da convergência das taxas *forward* para a UFR.

Como explica Silva [2012], nos casos em que se tem este objetivo, é imediato que a utilização de *splines* não é apropriada para a parte extrapolada da curva, pois não considera a convergência para a UFR. Já os modelos de Svensson e Nelson-Siegel permitem garantir a convergência para uma taxa de juro em equilíbrio de longo prazo, pois contêm um parâmetro que corresponde ao valor da taxa de juro de longo prazo. Deste modo, para garantir a convergência, basta fixar esse parâmetro no valor da UFR. No entanto, a estimação subsequente fica com menos um parâmetro, a flexibilidade do modelo diminuiu e o erro de ajustamento aumenta.

A construção da ETTJ através da técnica de Smith-Wilson pressupõe, para garantir o princípio de não arbitragem, que a curva passa por todos os pontos obtidos diretamente da informação de mercado. Mais ainda, e como se pretende, a partir do *Last Liquid Point*, a curva converge para o equilíbrio de longo prazo - a *Ultimate Forward Rate*.

Assuma-se então que existem N instrumentos financeiros de interesse (obrigações de cupão zero, obrigações governamentais com *rating* AAA, taxas *swap*), com

maturidades definidas na parte líquida da ETTJ, e seja J o número das diferentes datas nas quais se verifica pelo menos um *cash flow* de algum desses instrumentos financeiros. Desta forma, os *inputs* do modelo de Smith-Wilson são: o preço de mercado m_i do instrumento i , $i = 1, \dots, N$, na data de avaliação; todas as datas de pagamento, u_1, \dots, u_J ; os *cash flows* $cf_{i,1}, cf_{i,2}, \dots, cf_{i,J}$ relativos ao instrumento i nos momentos u_1, \dots, u_J .

Smith e Wilson propuseram a seguinte fórmula geral para o preço:

$$(6) \quad P(t) = e^{-UFR \cdot t} + \sum_{i=1}^N \xi_i \left(\underbrace{\sum_{j=1}^J cf_{i,j} \cdot W(t, u_j)}_{K_i(t)} \right), \quad t \geq 0,$$

onde ξ_i , $i = 1, \dots, N$, são os parâmetros de ajustamento da ETTJ a estimar e $W(t, u_j)$ são as funções simétricas de Wilson definidas pela expressão:

$$(7) \quad W(t, u_j) = e^{-UFR \cdot (t+u_j)} \cdot \left\{ \alpha \min(t, u_j) - 0,5 e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} (e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \cdot \min(t, u_j)}) \right\}.$$

Verifica-se assim que no método de Smith-Wilson as funções de preços $P(t)$ são definidas como a soma de um termo $-e^{-UFR \cdot t}$, que traduz o comportamento assintótico de longo prazo do fator de desconto, com uma combinação linear de N funções kernel $K_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, definidas à custa da UFR e de um parâmetro α , que exprime a velocidade com que as taxas *forward* estimadas convergem para a UFR:

$$(8) \quad K_i(t) = \sum_{j=1}^J cf_{i,j} \cdot W(t, u_j), \quad t > 0 \text{ e } i = 1, \dots, N.$$

Há tantas funções kernel quanto o número de instrumentos financeiros disponíveis no mercado, ou seja, se há N instrumentos financeiros, então há N equações lineares cuja solução conduz à ETTJ procurada.

No caso em que se conhecem os preços das obrigações de cupão zero $P(u_i)$, (6) reduz-se a $P(t) = e^{-UFR \cdot t} + \sum_{i=1}^N \xi_i \cdot W(t, u_j), t \geq 0$ e a resolução do sistema linear de N equações é simples, pois os primeiros membros são conhecidos.

Em notação matricial, vem:

$$(9) \quad \mathbf{m} = \mathbf{CFp}, \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)^T, \mathbf{CF} = \begin{bmatrix} cf_{1,1} & \dots & cf_{1,J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cf_{N,1} & \dots & cf_{N,J} \end{bmatrix}, \mathbf{p} = (P(u_1), \dots, P(u_j))^T.$$

Mas porque geralmente os preços $P(u_i)$ são desconhecidos, pode escrever-se \mathbf{CFp} , do seguinte modo, recorrendo a (6):

$$(10) \quad \mathbf{CFp} = \mathbf{CF} \cdot \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{CF} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{CF}^T) \boldsymbol{\xi}$$

$$\boldsymbol{\mu} = (e^{-UFR \cdot u_1}, \dots, e^{-UFR \cdot u_J})^T, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w(u_1, u_1) & \dots & w(u_1, u_J) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(u_N, u_1) & \dots & w(u_N, u_J) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$$

Então,

$$(11) \quad \mathbf{m} = \mathbf{CFp} \Leftrightarrow \mathbf{m} = \mathbf{CF}\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{CF} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{CF}^T) \boldsymbol{\xi} \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{CF} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{CF}^T)^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{CF}\boldsymbol{\mu}).$$

Uma vez conhecidos os valores dos fatores ξ_1, \dots, ξ_N , pode chegar-se aos valores dos fatores de desconto recorrendo a (6); conhecidos os fatores de desconto, consegue calcular-se as taxas *spot* e, por fim, desenhar a *yield curve*.

3 *ULTIMATE FORWARD RATE*

Como se referiu em 1.2, a utilização de técnicas de extrapolação macroeconómicas permite obter resultados estáveis no longo prazo e esta é uma característica importante. Tal estabilidade é conseguida através da convergência das taxas *forward* estimadas para a *Ultimate Forward Rate*, a taxa de juro em equilíbrio de longo prazo.

De acordo com o QIS5, a UFR deve ser determinada para cada moeda e deve estar sujeita a revisões regulares. Além disso, deve sofrer alterações apenas no seguimento de mudanças fundamentais nas expectativas de longo prazo.

Estabeleceu-se (cf. Draft do Regulamento de nível 2, 2011) que o ponto inicial para a extrapolação das taxas de juro sem risco deverá ser 20 anos (ou seja, esta maturidade corresponde ao LLP). Considerou-se ainda que o intervalo de convergência é de 20 anos, ou seja, a partir da maturidade de 40 anos, as taxas *forward* extrapoladas coincidem com a UFR.

Em teoria, a UFR resulta da soma de quatro parcelas: a taxa de inflação esperada no longo prazo, a taxa de juro real esperada, o prémio nominal de longo prazo e, por fim, o efeito de convexidade nominal de longo prazo.

O prémio nominal representa o retorno adicional esperado por um dado investidor, por adquirir títulos com maturidades mais longas. Este prémio pode ser positivo ou negativo, uma vez que depende de fatores como a liquidez e/ou o *habitat* preferido do agente. Dado que não existem dados empíricos sobre o prémio nominal no muito longo prazo, a sua estimação envolve extrapolar, para maturidades mais longas, os prémios nominais para os prazos em que são conhecidos. O efeito de convexidade está relacionado com a relação não linear (convexa) observada entre as taxas de juro e os preços das obrigações com diferentes maturidades. Este efeito é puramente técnico e

resulta sempre numa componente negativa. Sendo bastante difícil estimar os prémios nominais e o efeito de convexidade, a UFR, na prática, resulta apenas da soma de duas parcelas: a taxa de inflação esperada no longo prazo e as taxas de juro reais esperadas.

3.1 ESTIMAÇÃO DA TAXA DE INFLAÇÃO DE LONGO PRAZO ESPERADA

Seria injusto que a estimação da taxa de inflação de longo prazo esperada recorresse só e apenas às médias históricas observadas, pois as elevadas taxas verificadas durante o último século não parecem ser relevantes para o futuro.

De facto, nas últimas décadas, a maioria dos Bancos Centrais têm traçado objetivos semelhantes entre si para a taxa de inflação e têm sido bem-sucedidos a cumpri-los. Na Europa, o BCE evidenciou no Boletim Mensal de Julho de 2013 que pretende que a taxa de inflação na Zona Euro se mantenha, a médio e longo prazo, num nível próximo e inferior a 2% - este é também o valor de referência utilizado pela grande maioria dos Bancos Centrais.

Uma vez que a CEIOPS calcula a ETTJ sem risco não só para a Zona Euro, mas também para as restantes moedas da Zona Económica Europeia, o iene japonês, o franco suíço, a lira turca e o dólar americano, definiu três grupos diferentes com base nas médias históricas observadas.

TABELA I – TAXA DE INFLAÇÃO DE LONGO PRAZO ESPERADA

Grupo	Países	Taxa de Inflação de Longo Prazo Esperada
Taxa de Inflação <i>Standard</i>	Zona Euro, Reino Unido, Noruega, Suécia, Dinamarca, Polónia, Roménia e EUA	2%
Elevadas Taxas de Inflação	Turquia	3%
Baixas Taxas de Inflação	Japão e Suíça	1%

Fonte: QIS5 Calibration Paper

3.2 ESTIMAÇÃO DA TAXA DE JURO REAL ESPERADA

Dimson et al. [2010] fizeram a comparação entre os retornos anualizados das obrigações entre 1900 e 2009 para 19 países dos cinco continentes.

Durante a primeira metade do Século XX, alguns países atravessaram períodos de elevada inflação, ou mesmo hiperinflação – a Alemanha, entre 1922 e 1923, viveu um período de hiperinflação, a Itália atingiu uma taxa de inflação de 344% em 1944, a França de 74% em 1946 e o Japão de 317% no mesmo ano. Naturalmente, os retornos reais anualizados das obrigações destes países são influenciados por tão elevadas taxas.

Por forma a estimar corretamente o valor da taxa de juro real para todas as economias, os autores fizeram uma comparação entre os retornos reais anualizados das obrigações na segunda metade do século *versus* os correspondentes retornos da primeira metade. Calcularam a média, ponderada pelo Produto Interno Bruto (PIB) de cada país, dos retornos reais das obrigações e obtiveram uma taxa de retorno real médio de -1,1% (primeira metade) e de 2,3% (segunda metade).

Uma vez que se espera que as taxas de juro reais não difiram substancialmente entre economias, quando consideramos um horizonte temporal de 100 anos, a CEIOPS estimou, com base neste trabalho, uma taxa de juro real esperada de 2,2% para todos os países. Conjugando os valores das Tabelas I e II, a UFR (no âmbito do QIS5) vem:

TABELA II – ULTIMATE FORWARD RATE

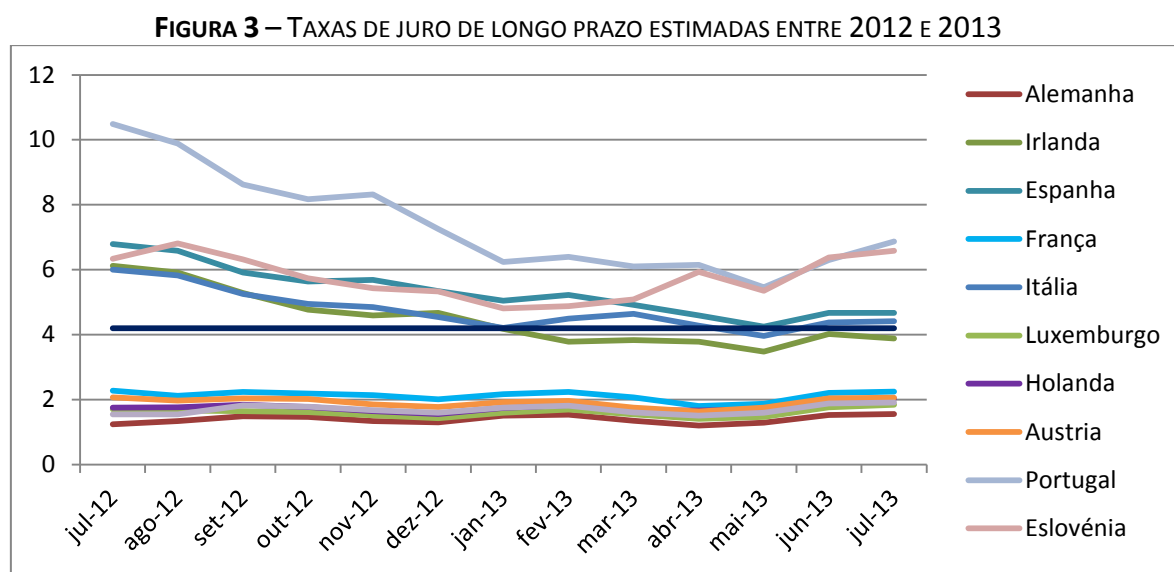
Categoria	Países	UFR
1	Japão e Suíça	3,2%
2	Zona Euro , Reino Unido, Noruega, Suécia, Dinamarca, Polónia, Roménia e EUA	4,2%
3	Turquia	5,2%

Fonte: QIS5 Calibration Paper

A Figura 2 mostra a evolução das taxas de juro de longo prazo, entre 2000 e 2010, para o euro, a libra, o dólar americano, o iene japonês e o franco suíço. Este gráfico foi apresentado no âmbito do QIS5 para sustentar a diferenciação feita pela CEIOPS entre as diferentes moedas, no cálculo da UFR. Observa-se que as taxas de juro de longo prazo para a Zona Euro, Estados Unidos da América e Reino Unido, em 2010, se aproximavam do valor da UFR (4,2%).



Na Figura 3 estão representadas as taxas de juro de longo prazo para 11 países da Zona Euro, entre julho de 2012 e julho de 2013.



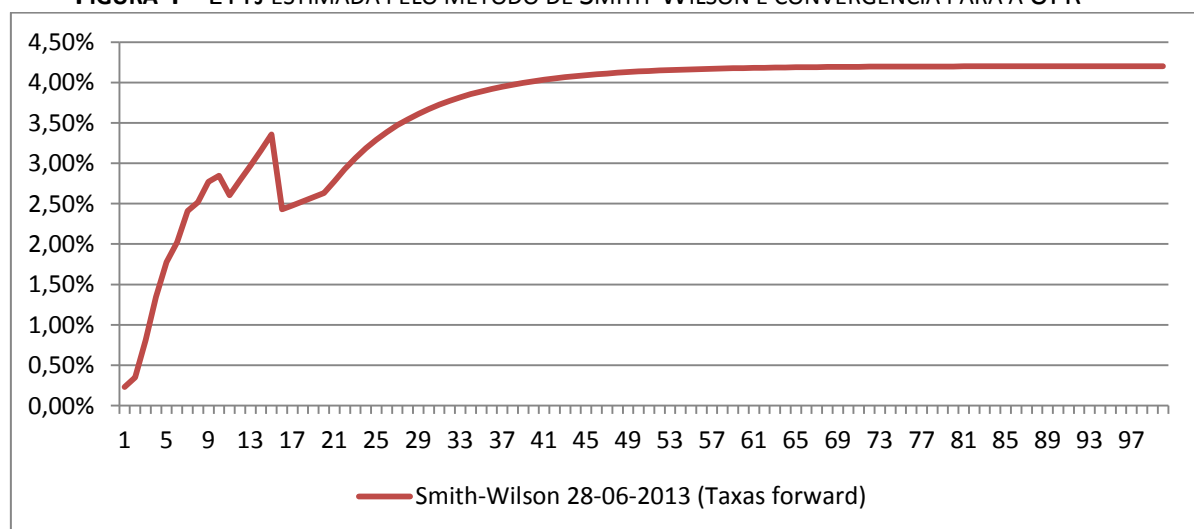
Verifica-se que, para o horizonte temporal considerado, a taxa de juro de longo prazo estimada pelo BCE, em Julho de 2013, é inferior à UFR para a Alemanha (1,56%), Luxemburgo (1,84%), Finlândia (1,91%), Holanda (2,03%), Áustria (2,06%) e França (2,25%). Os países cuja taxa de juro de longo prazo está mais próxima da UFR indicada pela CEIOPS são Irlanda (3,88%) e Itália (4,42%). De entre os países analisados, a Eslovénia (6,58%) e Portugal (6,87%) são os países para os quais a taxa de juro de longo prazo ultrapassa a UFR. Apesar das diferenças significativas observadas entre países, de acordo com o proposto pelo QIS5, a ETTJ deverá ser estimada, em toda a Zona Euro, assumindo o mesmo valor para a UFR.

4 MÉTODO DE SMITH-WILSON E CONVERGÊNCIA PARA A UFR

4.1 DETERMINAÇÃO DA ETTJ

Na figura 4, apresenta-se a ETTJ estimada a partir das taxas *swap* observadas no mercado até à maturidade 20 anos. Recorre-se à metodologia de Smith-Wilson e à convergência das taxas *forward* para a *Ultimate Forward Rate*. Os parâmetros do modelo estimado estão de acordo com as diretrizes do QIS5 – a UFR está fixa em 4,2% e o parâmetro α é 0,1.

FIGURA 4 – ETTJ ESTIMADA PELO MÉTODO DE SMITH-WILSON E CONVERGÊNCIA PARA A UFR



Fonte: Bloomberg, 28-06-2013

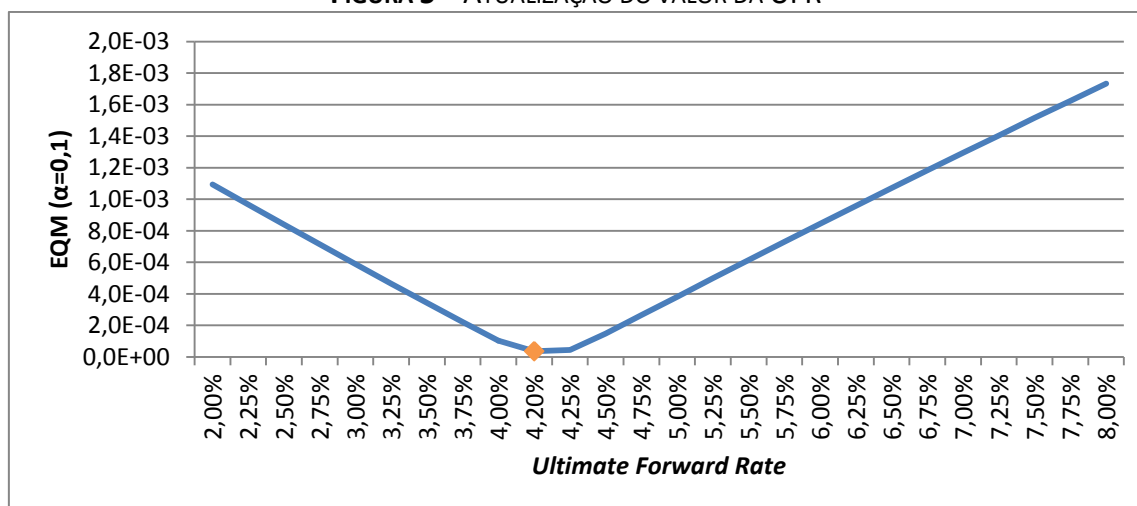
4.2 ESTUDO SOBRE OS PARÂMETROS

O relatório final do QIS5, onde constam as diretrizes para a construção da ETTJ a partir da metodologia de Smith-Wilson e da UFR, foi publicado a 14 de Março de 2011, pelo que se considerou ser importante estudar se o valor proposto para a UFR, para α e para o LLP ainda continua a ser válido, passados quase três anos.

4.2.1 ATUALIZAÇÃO DO VALOR DA UFR

Para abordar a questão colocada, estimou-se o modelo, mantendo o parâmetro α fixo e igual a 0,1, e admitindo um intervalo de valores para a UFR entre 2% e 8%. De seguida, calcularam-se os Erros Quadráticos Médios (EQM) entre as taxas observadas no mercado a 28 de Junho de 2013 e as taxas estimadas pelo modelo, para os diferentes valores da UFR. Procurou-se saber qual o valor da *Ultimate Forward Rate* que minimiza os EQM e os resultados obtidos estão representados na Figura 5:

FIGURA 5 – ATUALIZAÇÃO DO VALOR DA UFR



Conclui-se que o valor proposto em Solvência II para a taxa de juro em equilíbrio de longo prazo continua a estar de acordo com as expectativas atuais do mercado, pois o valor da UFR (no intervalo considerado) que minimiza os EQM do modelo estimado é 4,2% (ver Tabela VIII do Anexo B).

4.2.2 ALFA

Como se viu em 2.5.2, o parâmetro α define a velocidade de convergência das taxas *forward* para a UFR. De acordo com as diretrizes do Solvência II, a maturidade em que a taxa *forward* coincide com a UFR é 40 anos.

De acordo com o modelo estimado e com o trabalho de outros autores, nomeadamente Budiono [2012], quando α está fixo no valor 0,1, as taxas *forward* estimadas só conseguem atingir o valor 4,2% em maturidades muito longas, implicando um período de convergência superior ao indicado no QIS5.

Assim, é relevante conhecer qual o valor de α para o qual o período de convergência é 20 anos. Para isso, estimou-se o modelo proposto, considerando a UFR constante e igual a 4,2%, fazendo variar o parâmetro α no intervalo $[0,1; 1]$. Os resultados completos desta análise encontram-se na Tabela IX do Anexo B. No entanto, tem-se:

TABELA III – PARÂMETRO ALFA E PERÍODO DE CONVERGÊNCIA

Parâmetro α	Maturidade em que a taxa <i>forward</i> atinge a UFR
0,1	$t = 85$
0,275	$t = 40$

No modelo estimado, seria necessário assumir $\alpha = 0,275$ para garantir que, a partir da maturidade 40 anos, as taxas *forward* coincidem com a UFR.

Pelo contrário, ao assumir-se $\alpha = 0,1$, tem-se um período de convergência de 65 anos.

A principal consequência deste resultado prende-se com a escolha de estratégias de *hedging*. Por exemplo, se um gestor de *portfolio* decidir a sua estratégia de *hedging* com base nos pressupostos estabelecidos no QIS5, venderá contratos *swap* para maturidades de 50 a 60 anos, admitindo que, a partir dos 40 anos, a taxa *forward* é

constante, quando, se $\alpha = 0,1$, a taxa *forward* varia até aproximadamente a maturidade de 85 anos.

Budiono [2012] propõe calibrar o parâmetro α até que as taxas *forward* coincidam com a UFR na maturidade de 40 anos, com uma tolerância de 0,0003%. O valor do α obtido, considerando dados entre 2001 e 2012, é 0,4.

Conclui-se, então que, por forma a obter um intervalo de convergência de 20 anos, é necessário assumir um valor mais elevado para o parâmetro α , ou seja, aumentar a velocidade de convergência das taxas *forward* para a UFR.

4.2.3 LAST LIQUID POINT

A falta de liquidez nos mercados financeiros, quando se considera títulos com maturidades no muito longo prazo, constitui um enorme desafio quando se pretende construir a Estrutura Temporal das Taxas de Juro incluindo esses prazos. A introdução da UFR é vista no sector segurador como uma ferramenta para ultrapassar esta dificuldade.

Assim, a questão que se coloca é a de determinar qual a última maturidade em que o mercado ainda é suficientemente líquido, ou seja, qual a maturidade que corresponde ao *Last Liquid Point*.

No âmbito do QIS5, determinou-se que o LLP ocorre na maturidade de 20 anos. Implicitamente assume-se que, a partir desta maturidade, não existem instrumentos financeiros suficientemente líquidos nos mercados.

Budiono [2012] e Kocken et al. [2012] argumentam que o *Last Liquid Point* deverá ocorrer na maturidade de 30 anos pois a liquidez do mercado de *swaps* (assim como do mercado para obrigações governamentais) é elevada até esta maturidade.

Existe uma enorme dificuldade em obter dados sobre o volume total de transações de contratos *swaps* sobre taxas de juro, uma vez que estes instrumentos financeiros são maioritariamente transacionados *over-the-counter*. No entanto, na tabela que se segue está o volume relativo de transações deste tipo de instrumentos pela London Clearing House (LCH), nos primeiros seis meses de 2012, por segmento de maturidade, para um volume de transações de 1.782 biliões de euros.

TABELA IV – TRANSAÇÕES DE SWAPS DE TAXAS DE JURO

Segmento (anos)	10-20	20-30	>30
Volume Relativo	62%	32%	5%

Fonte: London Clearing House, Dezembro de 2012

De acordo com estes dados, até aos 30 anos, a liquidez no mercado de *swaps* parece substancial, havendo assim evidência empírica favorável aos argumentos dos referidos autores.

Identificar qual a maturidade a que corresponde o *Last Liquid Point* é uma questão bastante relevante, especialmente se os *cash-flows* que se pretende atualizar ocorrerem no período de convergência para a UFR. A partir do LLP, o modelo não tem em linha de conta nova informação de mercado, pelo que as taxas de juro estimadas no período de convergência dependem inteiramente da técnica de extrapolação utilizada entre o LLP e a UFR.

Kocken et al. [2012] defendem a alteração do método proposto para que a curva estimada tenha em linha de conta informação de mercado para além do LLP, ou seja, para que os inputs do modelo não sejam exclusivamente taxas observadas no mercado para os primeiros 20 anos.

5 AVALIAÇÃO DE PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES

5.1 GENERALIDADES

Segundo Garcia & Simões [2010], um plano de pensões não é mais do que um programa que define as regras e condições para se receber um determinado benefício, geralmente liquidado na forma de pensão. Os planos de pensões têm diferentes classificações, de acordo com as garantias que oferecem, com a sua forma de financiamento e ainda relativamente à Segurança Social.

Quanto às garantias que oferecem, os planos de pensões são classificados como:

- Planos de benefício definido: quando os benefícios estão definidos previamente e as contribuições para o fundo são calculadas por forma a garantir o pagamento daqueles benefícios.
- Planos de contribuição definida: quando as contribuições estão definidas previamente e os benefícios vão depender do valor das contribuições entregues e dos rendimentos acumulados.
- Planos mistos: quando se combinam características de ambos.

A principal diferença entre planos de benefício definido e planos de contribuição definida está em qual das partes (empresa ou beneficiários) terá que suportar o risco de uma eventual evolução negativa do investimento realizado.

Com efeito, se o plano de pensões adotado for de benefício definido, os beneficiários sabem, à partida, a fórmula de cálculo dos benefícios a que terão direito, caso reúnam as condições previstas no plano de pensões. Esses benefícios estão, por isso, estabelecidos contratualmente e não dependerão da rendibilidade que o fundo venha a obter.

Caso o plano de pensões adotado seja de contribuição definida, o benefício não é conhecido à partida e depende do montante correspondente às contribuições efetuadas e aos rendimentos acumulados. Como tal, uma evolução negativa da rentabilidade do fundo repercutir-se-á desfavoravelmente no valor das pensões a que os beneficiários terão direito.

Quando o plano de pensões é misto, o risco financeiro que lhe está associado é repartido pela empresa e pelos beneficiários.

Quanto à forma de financiamento, os planos de pensões dividem-se em:

- Planos contributivos: quando existem contribuições dos beneficiários, muito embora estas possam não ter carácter obrigatório;
- Planos não contributivos: quando as contribuições são apenas efetuadas pela empresa.

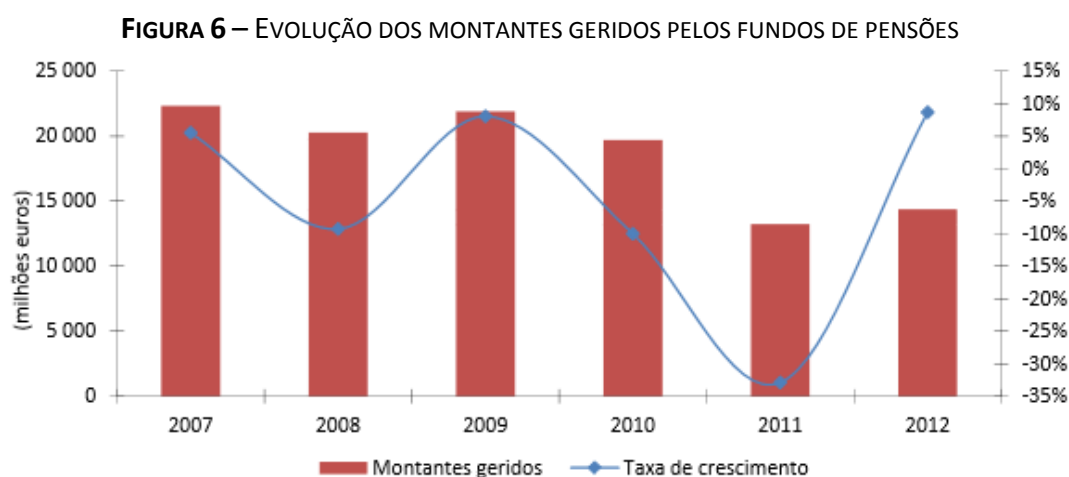
Relativamente à Segurança Social, os planos de pensões podem ser independentes ou não integrados, quando os benefícios estabelecidos são totalmente independentes da Segurança Social, ou complementares, quando os benefícios do plano complementam de alguma forma as pensões da Segurança Social.

Um fundo de pensões não é mais do que um património autónomo que se destina exclusivamente ao financiamento de um ou mais planos de pensões. Desta forma, um fundo de pensões deve ser sempre visto como um veículo de financiamento dos planos que lhe são subjacentes.

Os fundos de pensões são classificados de acordo com o tipo de planos de pensões que financiam. Desta forma, temos fundos de benefício definido, de contribuição definida ou mistos. São ainda classificados de acordo com a natureza contratual existente:

- Fundo de pensões fechado: quando diz respeito apenas a uma empresa ou, envolvendo várias, se existir um vínculo profissional ou social entre elas e for necessário o seu acordo para entrada de novos associados no fundo.
- Fundo de pensões aberto: quando a adesão ao fundo depender unicamente da aceitação pela entidade gestora, não sendo obrigatório a existência de um vínculo entre os aderentes ao fundo.

Os fundos de pensões em Portugal têm ainda uma expressão pequena, quando comparada com o que se verifica noutros países, em especial países de origem anglo-saxónica. O Instituto de Seguros de Portugal disponibiliza dados anualmente sobre os montantes geridos pelos fundos de pensões no mercado português. Os últimos dados disponíveis, indicam que, a 31 de Dezembro de 2012, o valor sob gestão de fundos de pensões ascendia a 14.388 milhões de euros, o que traduz um acréscimo de 8,7% face ao final de 2011 (Figura 6).



O facto de um plano de pensões estabelecer o pagamento de uma pensão diferida no tempo, coloca o desafio de estimar os meios financeiros necessários a cada momento para se poder cumprir, com razoável grau de confiança, o plano estabelecido. Para tal, é necessário determinar as responsabilidades atuariais do fundo, que correspondem

ao valor atual dos benefícios futuros, relativamente ao tempo de serviço já prestado.

Tem-se, então:

$$(12) \quad \text{Responsabilidades atuariais} = \sum_{i=1}^n VABT_i \times \frac{(x_i - u_i)}{(IR - u_i)},$$

onde $VABT_i$ é o valor atual dos benefícios totais referentes ao colaborador i com $i = 1, \dots, n$, x_i é a idade técnica calculada à data de referência da avaliação atuarial do colaborador i , u_i é a idade do colaborador i à data de admissão na empresa e IR é a idade de reforma.

Nas avaliações atuariais é usual considerar duas medidas para avaliar o desempenho financeiro dos fundos de pensões – o rácio de financiamento e as responsabilidades não financiadas.

O rácio ou nível de financiamento é o quociente entre o valor de mercado dos ativos e o valor das responsabilidades atuarias, num dado momento. Obter um rácio de financiamento inferior a 100% implica que o valor das obrigações excede o valor dos ativos. Como tal, quanto menor for o rácio de financiamento, maior é o risco do plano de pensões não se cumprir.

As responsabilidades não financiadas são obtidas pela diferença entre o valor das responsabilidades atuariais e o valor dos ativos.

5.2 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA DE SMITH-WILSON E *ULTIMATE FORWARD RATE* NA AVALIAÇÃO DE UM PLANO DE PENSÕES

Nesta secção pretende avaliar-se as responsabilidades futuras de um plano de pensões concreto, de acordo com as diretrizes do Solvência II. O objetivo é comparar os resultados assim obtidos com os que resultaram da avaliação atuarial realizada pela entidade gestora do plano, que se aceita como representativa da prática adotada pelo sector dos fundos de pensões em Portugal. Para tal, e por forma a garantir

comparabilidade, as responsabilidades foram calculadas de acordo com os pressupostos atuarias assumidos pela entidade gestora e descritos na seção seguinte.

5.2.1 Pressupostos atuariais

O plano de pensões em estudo é um plano de benefício definido, não contributivo e independente da Segurança Social. Estabelece o pagamento de uma pensão mensal vitalícia, paga 14 vezes por ano, calculada da seguinte forma:

$$(13) \quad \textit{Pensão mensal do colaborador } i = 0,2 \times S^i ,$$

onde S^i corresponde ao salário base mensal auferido pelo colaborador i no mês anterior ao do vencimento do benefício. Prevê o pagamento da pensão apenas quando o colaborador atinge a idade normal de reforma (INR), ou seja, a idade estipulada pelo regime de Segurança Social para atribuição de pensões de velhice – atualmente, 65 anos. O plano estipula ainda que nenhum colaborador se reforma antecipadamente e que o adiamento da reforma não é possível.

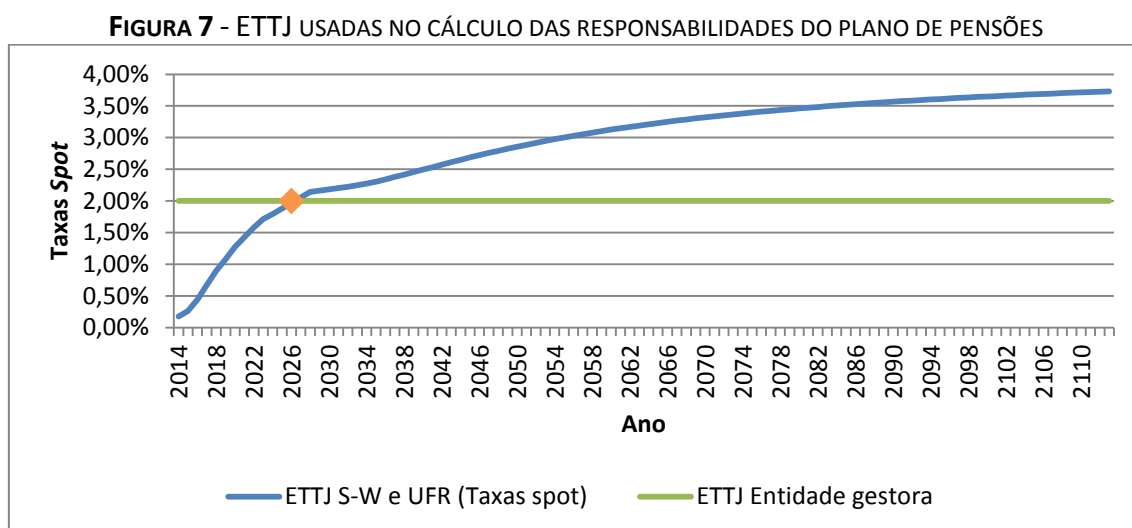
Por forma a calcular o salário base mensal à idade de reforma, assume-se uma taxa de crescimento salarial constante ao longo do tempo e igual a 2,5%. A entidade gestora cobra um encargo de 0,75% sobre o valor do benefício anual à idade de reforma.

É também necessário ter em linha de conta, no cálculo das responsabilidades, a probabilidade de sobrevivência de cada um dos colaboradores. Para esse fim, usa-se a tábua de mortalidade TV 88/90. Após o período ativo, utiliza-se a tábua de mortalidade GRF 80 que permite calcular a probabilidade de sobrevivência até aos 116 anos.

A data de referência considerada na avaliação das responsabilidades do plano de pensões é 28 de Junho de 2013.

Este plano de pensões abrange 102 colaboradores. O colaborador mais novo tem 21 anos e o colaborador mais velho tem 60 anos. A idade média dos colaboradores abrangidos pelo plano é 42 anos. A distribuição etária dos colaboradores está representada na Tabela IX do Anexo C.

A atualização das pensões mensais vitalícias a receber após a idade de reforma é feita a uma taxa de juro constante ao longo do tempo e igual a 2%. A figura 7 ilustra a ETTJ utilizada pela entidade gestora do plano de pensões para atualização dos *cash-flows* que, a partir de agora, se designa por ETTJ *flat*. Está também representada a estrutura temporal das taxas *spot* deduzida através da estimativa feita em 4.1, que se designa por ETTJ *SW UFR*.



Antes mesmo de se conhecerem os resultados obtidos, não é difícil concluir sobre o impacto direto na avaliação do plano de pensões quando se substituiu a ETTJ *flat* pela ETTJ *SW UFR*.

Tratando-se de um plano de pensões, os *cash-flows* ocorrem maioritariamente no muito longo prazo – quando a ETTJ *SW UFR* excede a ETTJ *flat*. Como tal, o valor atual das pensões pagas é substancialmente reduzido, pois o valor dos benefícios pagos é descontado a uma taxa de juro mais alta.

5.2.2 Avaliação atuarial

Na tabela V sumarizam-se os resultados obtidos pela entidade gestora, de acordo com os pressupostos indicados e com o método descrito no Anexo C. O valor de mercado dos ativos do plano a 28 de Junho de 2013 é € 516.486,10.

TABELA V - AVALIAÇÃO DO PLANO DE PENSÕES – ENTIDADE GESTORA

Responsabilidades atuariais	€ 2.340.259,54
Rácio de Financiamento	22,07 %
Responsabilidades não financiadas	€ 1.823.773,44

Substituindo a $ETTJ_{flat}$ pela $ETTJ_{SW\ UFR}$, obtém-se os seguintes resultados:

TABELA VI - AVALIAÇÃO DO PLANO DE PENSÕES – MÉTODO DE SMITH-WILSON E UFR

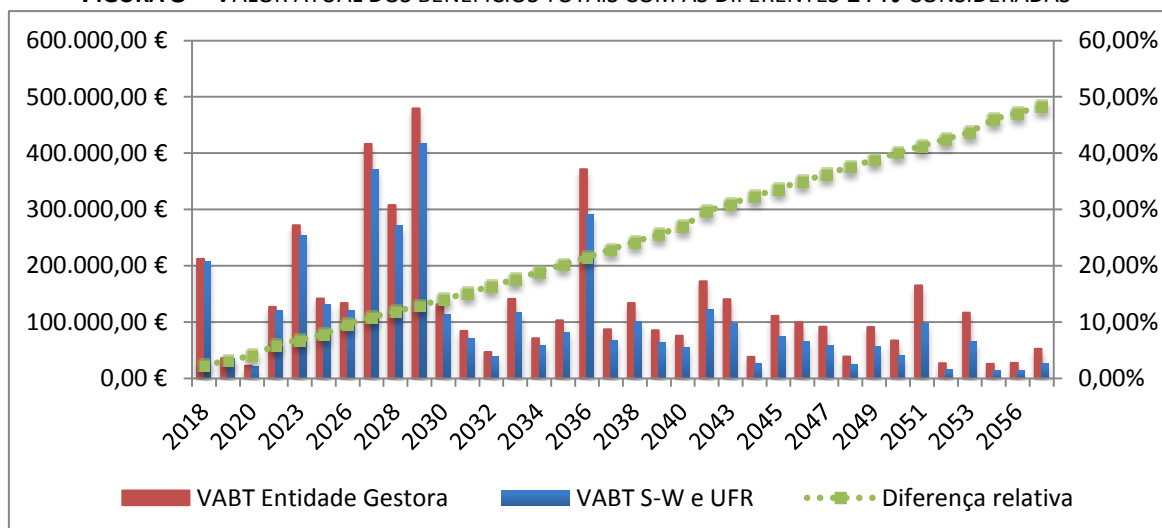
Responsabilidades atuariais	€ 1.985.436,66
Rácio de Financiamento	26,01 %
Responsabilidades não financiadas	€ 1.468.950,56

Da análise às tabelas anteriores, conclui-se que a introdução das regras de Solvência II tem um impacto direto positivo sobre o rácio de financiamento, que aumenta 4%.

O acréscimo no rácio de financiamento obtido para este plano de pensões do mercado português vai de encontro aos valores obtidos por Veltman [2012] para o mercado holandês. Esta autora quantificou o efeito positivo sobre o rácio de financiamento, com a introdução da metodologia de Smith-Wilson e da convergência para a UFR, entre 3 a 4%.

A Figura 8 mostra, para cada uma das ETTJ usadas, o valor atual dos benefícios totais, por ano de reforma dos colaboradores. Uma vez que a $ETTJ_{SW\ UFR}$ é crescente, à medida que a maturidade aumenta, aumenta a diferença relativa entre o valor atual dos benefícios totais calculado pela entidade gestora e o obtido recorrendo ao método de Smith-Wilson.

FIGURA 8 – VALOR ATUAL DOS BENEFÍCIOS TOTAIS COM AS DIFERENTES ETTJ CONSIDERADAS



5.3 OUTROS IMPACTOS DA INTRODUÇÃO DA UFR

A introdução da UFR para estimar a ETTJ tem diversos impactos, em especial, em países onde as regras para avaliação dos planos e fundos de pensões são mais rígidas, como é o caso da Holanda, onde, até 2012, as entidades gestoras de planos de pensões usavam obrigatoriamente a curva de mercado disponibilizada pelo Banco Central Holandês, calculada recorrendo às taxas *swap*.

No entanto, as consequências da crise global financeira foram determinantes para a decisão do Banco Central Holandês – a partir de Junho de 2012, os planos e fundos de pensões devem ser avaliados recorrendo à ETTJ que resulta da aplicação do método de Smith-Wilson e da convergência para a UFR.

Com efeito, com a crise financeira, os gestores dos planos e fundos de pensões enfrentaram um grave problema: os retornos dos ativos e o nível das taxas de juro diminuíram bastante, o que foi duplamente desfavorável e se traduziu no aumento do valor das responsabilidades e na redução dos rácios de financiamento reportados.

Neste cenário, as empresas de seguros argumentaram que as baixas taxas de juro verificadas no mercado se deviam, em grande parte, às medidas adotadas pelo BCE

para responder à crise. Como tal, a avaliação dos planos de pensões deveria ser feita recorrendo a uma ETTJ, representativa de um ambiente económico normal.

Assim, a adoção para avaliação das responsabilidades da ETTJ proposta em Solvência II permitiu reportar maiores rácios de financiamento e, por outro lado, defender as entidades gestoras dos planos e fundos de pensões da flutuação das taxas de juro.

Adicionalmente, pode ver-se que a introdução das novas regras tem também impacto sobre a solidariedade intergeracional. Num dado momento do tempo, um plano de pensões tem um determinado *portfolio* de ativos e obrigações presentes e futuras, que terá que cumprir. A alteração das regras para a avaliação deste plano de pensões, nomeadamente a introdução da UFR, não altera a capacidade atual do plano para cumprir as suas obrigações. No entanto, tem efeitos sobre as medidas do seu desempenho. De facto, se o rácio de financiamento é maior, os colaboradores mais velhos podem tentar obter benefícios mais elevados, mas a sua eventual atribuição será feita com prejuízo para os colaboradores mais novos.

Outro aspeto relevante, consequente da introdução das novas medidas, é o risco político, para o qual é difícil determinar estratégias de *hedging*. Com efeito, a Estrutura Temporal das Taxas de Juro passa a ser indicada pelos reguladores, e é com base nela que é feito o cálculo das responsabilidades e das contribuições necessárias para garantir o seu pagamento. Ora acontece que os reguladores, por exemplo na sequência de um período de taxas de inflação ou taxas de juro reais muito baixas, podem decidir reduzir o valor da UFR. Em consequência, os rácios de financiamento diminuem e para garantir o pagamento das obrigações do fundo de pensões será necessário aumentar as contribuições ou, em alternativa, diminuir os benefícios.

6 CONCLUSÃO

Por forma a garantir estabilidade no longo prazo e mitigar o risco de flutuação das taxas de juro, o projeto Solvência II veio propor a introdução da UFR na construção da ETTJ utilizada para avaliar as responsabilidades dos planos e fundos de pensões (e de outros produtos em que as garantias se estendem no muito longo prazo).

Este trabalho teve como principal objetivo estudar os diversos impactos decorrentes da introdução das novas regras, concretizando para um plano de pensões do mercado português.

Conclui-se que a avaliação das responsabilidades através da ETTJ que resulta da aplicação do método de Smith-Wilson e da convergência para a UFR tem um impacto direto sobre o rácio de financiamento dos fundos de pensões; uma vez que os *cash-flows* são descontados com taxas de juro mais elevadas (no limite, 4,2%), o valor atual das responsabilidades é menor e, *ceteris paribus*, o rácio de financiamento reportado é maior. Para o plano de pensões considerado, a alteração da ETTJ para a proposta em Solvência II, levou a um aumento de 4% no rácio de financiamento.

O principal contributo deste trabalho é a apresentação e o estudo quer da metodologia de Smith-Wilson quer da *Ultimate Forward Rate*. A construção da ETTJ proposta pela CEIOPS e a sua aplicação para avaliação de um plano de pensões do mercado português permite observar para Portugal uma situação semelhante ao estudo pioneiro desenvolvido para a Holanda por Budiono [2012].

As eventuais conclusões devem contudo ser vistas com cautela, pois a metodologia proposta está ainda a ser alvo de discussões e aperfeiçoamentos.

De acordo com as diretrizes atuais, o parâmetro alfa, determinado à priori, é fixo e igual a 0,1. No entanto, ao assumir-se este valor, as taxas *forward* só coincidem com a UFR na maturidade de 85 anos, desrespeitando-se o período de convergência indicado no QIS 5. Diversos autores - veja-se, por exemplo, o trabalho de Budiono (2012) - questionam se alfa deverá ser mantido fixo e propõem calibrar o parâmetro. A questão que se coloca, para estudos futuros, é a da determinação de critérios objetivos para determinar o alfa nas diversas economias.

Outra questão relevante prende-se com o *Last Liquid Point*. Muitos autores defendem que o mercado, quer de *swaps* quer de obrigações governamentais, é suficientemente líquido até à maturidade de 30 anos. Esta é uma questão muito importante pois, de acordo com o modelo proposto a partir do LLP, a curva estimada não tem em linha de conta nova informação de mercado. Como tal, as taxas *forward* estimadas a partir dos 20 anos dependem exclusivamente do valor da taxa de juro no LLP e da UFR. Será importante em estudos futuros estudar a liquidez do mercado de *swaps* nas diversas economias para determinar corretamente o LLP, por forma a estimar o modelo de Smith-Wilson recorrendo, tanto quanto possível, aos dados disponibilizados pelo mercado.

BIBLIOGRAFIA

- Alves, C. (1996). “Taxas de Juro: Estrutura de Prazos e Modelos Dinâmicos”, Série Moderna Finanças 2, Bolsa de Derivados do Porto.
- Brealey, R., Myers, S. & Allen, F. (2006). “Principles of Corporate Finance”, 6ª Edição. New York: McGraw-Hill.
- Budiono, D. (2012). “Variable Ultimate Forward Rate Curve”. Disponível em:
<http://ssrn.com/abstract=2126717>
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (2010). “QIS 5 Calibration Paper”. Disponível em:
http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/ceiops-calibration-paper_en.pdf
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (2010). “QIS 5 Risk-free interest rates – Extrapolation method”. Disponível em:
http://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/QIS/QIS5/ceiops-paper-extrapolation-risk-free-rates_en-20100802.pdf
- Committee of European Insurance and Occupation Pension Supervisors (2013). “Technical findings on the long term guarantee assessment”. Disponível em:
https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/QIS/Preparatory_forthcoming_assessments/final/outcome/EIOPA_LTGA_Report_14_June_2013_01.pdf

- Cox, C., Ingersoll, E. & Ross, S. (1985). “A theory of the term structure of interest rates”, *Econometrica*, 53 (2), 385-407.
- Dimson, E., Marsh, P. & Staunton, M. (2010). “Risk and return in the 20th and 21th”, *Business Strategy Review*, Vol. 11, 1-18.
- Discount Rate Task Force (2001). A Coherent Framework for Discount Rates. *Australian Actuarial Journal*, Vol. 7, n.º 3, pp. 435-541.
- Dutch Actuarieel Genootschap & Actuarieel Instituut (2009). Report on Principles for the Term Structure of Interest Rates: “The right curve does not exist.”. Disponível em: http://www.ag-ai.nl/download/7398-20091612RTS%2Brapport_EngelsDEF.pdf.
- Mishkin, F. & Eakings, S. (2008). “Financial Markets and Institutions”, 6ª Edição. Boston: Prentice Hall.
- Garcia, J. & Simões, O. (2010). “Matemática Atuarial Vida e Pensões”, 1ª Edição. Lisboa: Almedina.
- Kocken, T., Oldenkamp, B. & Potters, J. (2012). “An alternative model for extrapolation”, *Insurance Risk*, Setembro de 2012. Disponível em: http://www.cardano.com/cms/upload/20120901_-_Insurance_risk_-_An_alternative_model_for_extrapolation.pdf
- Kocken, T., Oldenkamp, B. & Potters, J. (2012). “Dangerous design flaws in the Ultimate Forward Rate: the impact on risk, stakeholders and hedging costs”, working paper. Disponível em: http://www.cardano.com/cms/upload/UFR_-_working_paper_-_UFR_-_20120713_.pdf

- Nelson, C. & Siegel, A. (1987). “Parsimonious Modeling of Yield Curve”, *Journal of Business*, vol. 60, 473-489.
- Silva, H. (2012). “Imunização dos Efeitos Cíclicos no Cálculo das Provisões Técnicas em ambiente Solvência II”, Tese de Mestrado em Ciências Atuariais. Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa.
- Svensson, L. (1994). “Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994”, *Centre for Economic Policy Research*, Discussion Paper 105.
- Smith, A. & Wilson, T. (2001). “Fitting yield curves with long term constraints”, working paper, Bacon and Woodrow.
- Veltman, H. (2012), “The Ultimate Forward Rate: Discounting Dutch Pension Fund Liabilities”, *AXA Investment Managers Research*.
- The Barrie & Hibbert (2008). “A framework for estimating and extrapolating the term structure of interest rates”. Disponível em:
http://www.barrhibb.com/documents/downloads/A_Framework_for_Estimating_and_Extrapolating_the_Term_Structure.pdf
- The Financial Supervisory Authority of Norway (2010). “A technical note on the Smith-Wilson method”. Disponível em:
http://www.finanstilsynet.no/Global/Forsikring%20og%20pensjon/Skadeforsikring/Tilsyn%20og%20overv%C3%A5king/Rapportering/A_Technical_Note_on_the_Smith-Wilson_Method_100701.pdf

FONTES DE DADOS ESTATÍSTICOS:

European Central Bank (2012). *Long term statistics for EU Member States*.

Disponível em: <http://www.ecb.europa.eu/stats/money/long/html/index.en.html>

ANEXOS

ANEXO A – MÉTODOS INDIRETOS PARA A CONSTRUÇÃO DA ETTJ

A construção indireta da ETTJ recorre muitas vezes a *splines*, ao modelo de Nelson-Siegel e à sua extensão, o modelo de Svensson.

- **SPLINES**

Um *spline* polinomial não é mais do que um conjunto de polinómios de baixo grau (usualmente, cúbicos), unidos em determinados pontos de transição (ou nós). Assim, a forma funcional dos fatores de desconto $B(t)$ dos *splines* polinomiais cúbicos normalmente usada é definida como:

$$(14) \quad B(t) = \begin{cases} B_0(t) = a_0 + b_0t + c_0t^2 + d_0t^3, & \text{se } t \in [0,5] \\ B_5(t) = a_1 + b_1t + c_1t^2 + d_1t^3, & \text{se } t \in [5,10] \\ B_{10}(t) = a_2 + b_2t + c_2t^2 + d_2t^3, & \text{se } t \in [10,20] \end{cases}$$

Neste caso, a ETTJ é representada por um polinómio de 3º grau, diferente em cada um dos intervalos em que se divide todo o espectro de maturidades. Pretende garantir-se que a função obtida é contínua e suave ao longo de todo o horizonte temporal como tal, podem surgir problemas nos nós. Para garantir a continuidade e a suavidade da ETTJ, os coeficientes dos polinómios em intervalos adjacentes são estimados sujeitos às seguintes restrições de *matching* e *smooth-pasting*:

$$(15) \quad \begin{cases} B_0^i(5) = B_5^i(5) \\ B_5^i(10) = B_{10}^i(10), \text{ para } i = 0,1,2 \text{ onde } i \text{ corresponde à ordem da derivada} \\ B_0(0) = 1 \end{cases}$$

À semelhança das *splines* polinomiais, pode também construir-se *splines* exponenciais que recorrem, como o nome indica, à função exponencial. Neste caso, os coeficientes

a estimar têm igualmente que respeitar as restrições de suavidade e continuidade. A forma funcional dos fatores de desconto $B(t)$ nos *splines* exponenciais é dada por:

$$(16) \quad B(t, t + \theta) = \begin{cases} B_0(\theta) = a_0 + b_0 e^{-\alpha\theta} + c_0 e^{-2\alpha\theta} + d_0 e^{-3\alpha\theta} \\ B_1(\theta) = a_1 + b_1 e^{-\alpha\theta} + c_1 e^{-2\alpha\theta} + d_1 e^{-3\alpha\theta} \\ B_2(\theta) = a_2 + b_2 e^{-\alpha\theta} + c_2 e^{-2\alpha\theta} + d_2 e^{-3\alpha\theta} \end{cases}$$

A metodologia dos *splines* é suficientemente flexível para ajustar a ETTJ a formas complexas. No entanto, dado que é determinada pelas observações em cada intervalo (e nos intervalos contíguos), quantas mais partições se definirem, melhor será o ajustamento da *yield curve*. Neste contexto, entende-se que a escolha das maturidades que definem os *splines* deve reflectir a segmentação natural observada no mercado obrigacionista. Por outro lado, quanto maior o número de *splines*, melhor será o ajustamento em termos de variância dos resíduos, mas menor será a suavidade da curva.

- **MODELO DE NELSON-SIEGEL**

Nelson & Siegel [1987] propuseram a seguinte forma funcional para a evolução das taxas *spot*:

$$(17) \quad R_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left[\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}} \right] + \beta_{2,t} \left[\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right],$$

$R_t(\tau)$ é a taxa de cupão zero (taxa *spot*) com capitalização contínua, τ_1 é o parâmetro de escala, $\beta_{0,t}$ é o parâmetro de nível, representando a taxa de juro de longo prazo (note-se que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_t(\tau) = \beta_{0,t}$), $\beta_{1,t}$ é o parâmetro de declive, representando o *spread* entre a maturidade de curto prazo e a maturidade de longo prazo ($\lim_{\tau \rightarrow 0} R_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}$), e $\beta_{2,t}$ é o parâmetro de curvatura responsável pelos movimentos *butterfly*, que não são mais do que alterações na curvatura da ETTJ.

- **MODELO DE SVENSSON**

Apesar de o modelo de Nelson e Siegel conseguir capturar muitas das formas que a ETTJ assume ao longo do tempo, foram desenvolvidas diferentes extensões, que pretendem conseguir maior flexibilidade com a introdução de novos parâmetros. Uma das extensões mais conhecidas, é o modelo de Svensson [1994]. A forma funcional agora proposta para a evolução das taxas *spot* é dada por:

$$(18) \quad R_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left[\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}} \right] + \beta_{2,t} \left[\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right] + \beta_{3,t} \left[\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right],$$

onde $\beta_{3,t}$ e τ_2 são também parâmetros de nível e escala.

O Banco Central Europeu (BCE) determina diariamente a ETTJ sem risco para o euro através do modelo de Svensson e a partir de obrigações com rating AAA, emitidas em euros por governos da Zona Euro. Estas ETTJ podem ser encontradas em: <http://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html>.

ANEXO B – ESTUDO SOBRE OS PARÂMETROS DO MÉTODO DE SMITH-WILSON

TABELA VII - *ULTIMATE FORWARD RATE* E
ERROS QUADRÁTICOS MÉDIOS

UFR	EQM
2,00%	1,09E-03
2,25%	9,66E-04
2,50%	8,40E-04
2,75%	7,14E-04
3,00%	5,89E-04
3,25%	4,65E-04
3,50%	3,42E-04
3,75%	2,21E-04
4,00%	1,03E-04
4,20%	3,65E-05
4,25%	4,37E-05
4,50%	1,48E-04
4,75%	2,65E-04
5,00%	3,82E-04
5,25%	4,99E-04
5,50%	6,15E-04
5,75%	7,30E-04
6,00%	8,45E-04
6,25%	9,58E-04
6,50%	1,07E-03
6,75%	1,18E-03
7,00%	1,29E-03
7,25%	1,41E-03
7,50%	1,51E-03
7,75%	1,62E-03
8,00%	1,73E-03

TABELA VIII - PARÂMETRO ALFA

Parâmetro α	Maturidade em que a Taxa <i>Forward</i> atinge a UFR
0,1	85
0,125	70
0,15	60
0,175	54
0,2	49
0,225	45
0,25	42
0,275	40
0,3	38
0,325	36
0,35	35
0,375	34
0,4	33
0,425	32
0,45	31
0,475	30
0,5	30
0,525	29
0,55	29
0,575	28
0,6	28
0,625	28
0,65	27
0,675	27
0,7	27
0,725	26
0,75	26
0,775	26
0,8	26
0,825	26
0,85	25
0,875	25
0,9	25
0,925	25
0,95	25
0,975	25
1	25

ANEXO C – AVALIAÇÃO RESPONSABILIDADES DO PLANO DE PENSÕES

TABELA IX - DISTRIBUIÇÃO ETÁRIA DOS COLABORADORES ABRANGIDOS PELO PLANO DE PENSÕES

Escalão Etário	Idades	Nº Colaboradores	Média de Idades por escalão etário
1	≤ 25 anos	8	23
2	> 25 e ≤ 30 anos	12	28
3	> 30 e ≤ 35 anos	12	33
4	> 35 e ≤ 40 anos	10	38
5	> 40 e ≤ 45 anos	16	43
6	> 45 e ≤ 50 anos	20	49
7	> 50 e ≤ 55 anos	17	53
8	> 55 e ≤ 60 anos	7	58
9	> 60 e ≤ 65 anos	0	0
		102	42

Para calcular as responsabilidades do plano de pensões foi necessário, para além dos pressupostos atuariais assumidos pela entidade gestora, recolher os seguintes dados para cada um dos colaboradores:

- Data de nascimento;
- Data de admissão na empresa;
- Salário base anual a 28 de Junho de 2013.

Nas fórmulas que se seguem, será utilizada a seguinte notação:

x^i – Idade atuarial calculada a 28 de Junho de 2013 do colaborador i , $i = 1, \dots, 102$.

u^i – Idade do colaborador i à data de admissão na empresa.

IR – Idade de reforma (65 anos).

n – Taxa de crescimento salarial (2,5%).

z – Encargos cobrados pela entidade gestora (0,75%).

$S_{t=0}^i$ – Salário base anual auferido pelo colaborador i no momento presente.

${}_{(IR-x)}P_x$ – Probabilidade de um colaborador com x anos sobreviver até à idade de reforma (ou seja, sobreviver $(IR - x)$ anos). Esta probabilidade é dada pela tabela de mortalidade TV 88/90.

${}_kP_{65}$ – Probabilidade de um colaborador com 65 anos sobreviver k anos, com $k = 1, \dots, 51$. Esta probabilidade é calculada através da tabela de mortalidade GRF 80. Quando $k = 51$, calcula-se a probabilidade de um colaborador com 65 anos sobreviver até aos 116 anos (idade máxima da tabela de mortalidade considerada).

y_t - taxa *spot* na maturidade t . De acordo com os pressupostos assumidos pela entidade gestora, a taxa *spot* é constante para todo o t . No entanto, a ETTJ que resulta da aplicação do método de Smith-Wilson e da UFR é crescente, pelo que as taxas *spot* dependem de t .

B_i – Benefício anual à idade de reforma do colaborador i líquido de encargos.

O primeiro passo consiste em calcular o valor total dos benefícios anuais à idade de reforma, B , que resulta da fórmula:

$$(19) \quad B = \sum_{i=1}^{102} B_i = \sum_{i=1}^{102} 0,2 \times S_{t=0}^i \times (1+n)^{IR-x^i} \times (1-z)$$

O valor atual dos benefícios totais é calculado segundo o método do prémio nivelado individual (a este propósito, veja-se, por exemplo, Garcia & Simões [2010]), recorrendo a y_t para descontar o valor dos *cash-flows* e às probabilidades ${}_kP_{65}$ e ${}_{(IR-x)}P_x$.